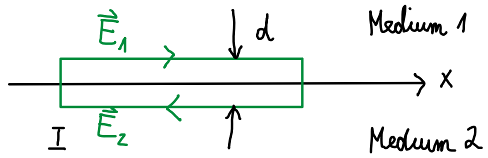
3. Tutorium

Donnerstag, 28. April 2022 15:29

Felder an Grenzflächen

1. Stetigkeitsbedingungen



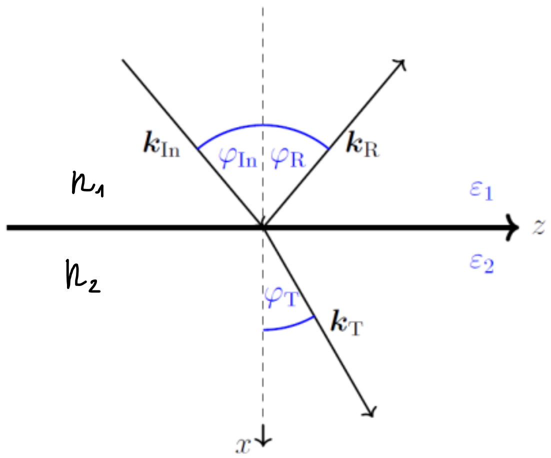
Faraday Gesetz: $\oint_{\partial C} \vec{E}\, d\vec{s} = i\omega \iint_C \vec{B}\, d\vec{A}$

bilde den Grenzfall für $d \to 0$ (verschwindende Fläche)

$$\underbrace{\int_{I}^{II} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}}_{\sim \vec{E}_{1,\parallel}} + \underbrace{\int_{II}^{I} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}}_{\sim \vec{E}_{2,\parallel}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{1,\parallel} = \vec{E}_{2,\parallel}}$$

dies lässt sich analog für das Magnetfeld zeigen $\boxed{\vec{H}_{1,\parallel} = \vec{H}_{2,\parallel}}$

2. Brechungs- und Reflektionsgesetz



- betrachte einfache Geometrie: x-z Ebene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \qquad \vec{k}_{in} = n \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

- Fordere nun Stetigkeit der z-Komponente

$$\vec{E}_{in}^{\parallel} e^{i\beta_{in} z} + \vec{E}_R^{\parallel} e^{i\beta_R z} = \vec{E}_T^{\parallel} e^{i\beta_T z}$$

- die Gleichheit ist nur erfüllt wenn $\vec{E}_{in}^{\parallel} + \vec{E}_R^{\parallel} = \vec{E}_T^{\parallel}$ und $\beta_{in} = \beta_R = \beta_T$ gelten

mit $\beta_{in} = \beta_R \Rightarrow n_1 \frac{\omega}{c} \sin\varphi_{in} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin\varphi_R \Rightarrow \boxed{\varphi_{in} = \varphi_R}$

$\beta_{in} = \beta_T \Rightarrow n_1 \frac{\omega}{c} \sin\varphi_{in} = n_2 \frac{\omega}{c} \sin\varphi_T \Rightarrow \boxed{n_1 \sin\varphi_{in} = n_2 \sin\varphi_T}$

3. Fresnel Formeln

- Wir müssen nun nach 2 Polarisationsrichtungen unterscheiden

S-Polarisation (Transversal elektrisch TE)

- $\vec{E} \perp$ zur Einfallsebene polarisiert
- $\vec{H}$ in der Einfallsebene polarisiert

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}$$

p-Polarisation (Transversal magnetisch TM)

- $\vec{H} \perp$ zur Einfallsebene polarisiert
- $\vec{E}$ in der Einfallsebene polarisiert

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ H \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun die Transmission und Reflektivität berechnen

$$\boxed{R = \frac{I_R}{I_{in}} \qquad T = \frac{I_T}{I_{in}}}$$

Da die Intensität proportional zum Quadrat der Feldstärken ist berechnen wir zunächst nur die Koeffizienten für Reflexion und Transmission

$$\rho = \frac{E_R}{E_{in}} \qquad \tau = \frac{E_T}{E_{in}}$$

<u>Herleitung für s-Polarisation</u>: $\varphi_{in} = \varphi_R = \varphi \qquad \varphi_T = \Psi$

1.) $E_{in} + E_R = E_T \quad |\cdot E_{in}$

$1 + \rho = \tau$

vorlaufende Amplituden von E und H (Tutorium 1)

$$\left.\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{i\vec{k}\times\vec{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega\mu_0 \vec{H}\right\} \quad \vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\vec{k}\times\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{n}{c\mu_0}\vec{e}_k \times \vec{E}}$$

2.) $H_{in,z} + H_{R,z} = H_{T,z}$

$$\Rightarrow H_{in,z} = \frac{n_1}{c\mu_0}\left(\vec{e}_k \times \vec{E}_{in}\right)_z$$

$$= \frac{n_1}{c\mu_0}\left[\begin{pmatrix}\cos\varphi\\0\\\sin\varphi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\E_{in}\\0\end{pmatrix}\right]_z = \frac{n_1}{c\mu_0}E_{in}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow H_{R,z} = \frac{n_1}{c\mu_0}\left[\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\0\\\sin\varphi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\E_R\\0\end{pmatrix}\right]_z = -\frac{n_1}{c\mu_0}E_R\cos\varphi$$

$$H_{T,z} = \frac{n_2}{c\mu_0}E_T\cos\Psi$$

$$\Rightarrow n_1 E_{in}\cos\varphi - n_1 E_R\cos\varphi = n_2 E_T \cos\Psi \qquad |: E_{in}$$

$$n_1\cos\varphi - n_1\cos\varphi\underbrace{\rho}_{\tau-1} = n_2\cos\Psi\underbrace{\tau}_{1+\rho}$$

$$\Rightarrow n_1\cos\varphi - n_2\cos\Psi = (n_2\cos\Psi + n_1\cos\varphi)\rho$$

$$\Rightarrow n_1\cos\varphi + n_1\cos\varphi = (n_2\cos\Psi + n_1\cos\varphi)\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{n_1\cos\varphi - n_2\cos\Psi}{n_2\cos\Psi + n_1\cos\varphi}} \qquad \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2n_1\cos\varphi}{n_2\cos\Psi + n_1\cos\varphi}}$$

Fresnel equations for oblique incidence

$$r_s = \frac{n_1\cos\varphi - n_2\cos\psi}{n_1\cos\varphi + n_2\cos\psi} \quad \text{and} \quad t_s = \frac{2n_1\cos\varphi}{n_1\cos\varphi + n_2\cos\psi}$$
$$r_p = \frac{n_2\cos\varphi - n_1\cos\psi}{n_2\cos\varphi + n_1\cos\psi} \quad \text{and} \quad t_p = \frac{2n_1\cos\varphi}{n_2\cos\varphi + n_1\cos\psi}. \tag{4.16}$$

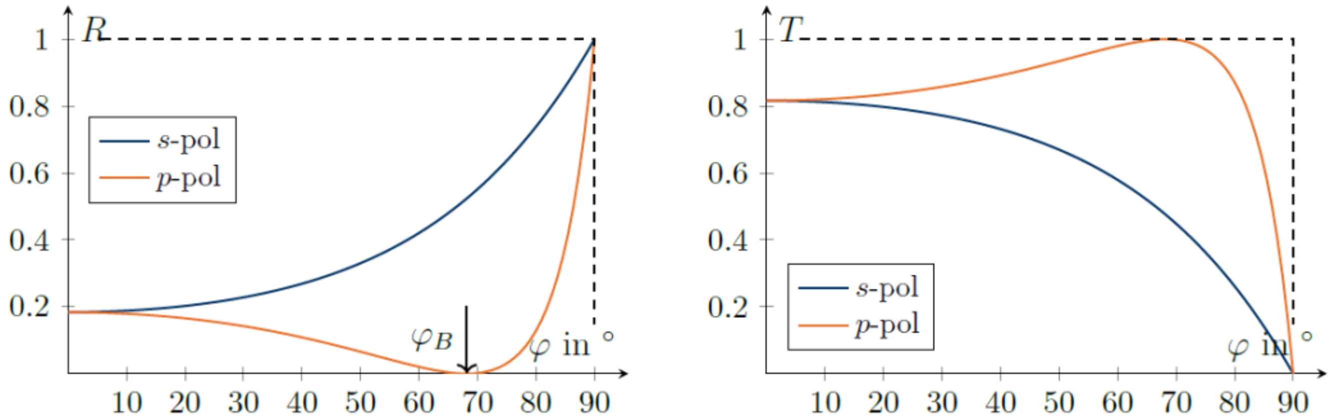


Fig. 12: Transmission $T = 1 - R$ and reflection $R = |r|^2$ for two media with $n_1 = 1$ and $n_2 = 2.5$ for p- and s-polarization. For the calculation one can simply use equations (4.16) and substitute $\cos\psi = \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi)^2}$ using SNELL's law.

Brewster - Winkel:

- für p-polarisiertes Licht existiert ein Winkel bei dem die Reflexion verschwindet
  ↳ tritt auf wenn $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ (Herleitung mit $r_p = 0$ und $n_1 \sin\varphi = n_2 \sin\psi$)
- der Brewster - Winkel lässt sich berechnen mit $\boxed{\tan\varphi_B = \frac{n_2}{n_1}}$

Herleitung: $r_p = 0 \Rightarrow n_2\cos\varphi = n_1\cos\psi$
$= n_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = n_1\sin\varphi$
$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \tan\varphi$

Zur Berechnung der Reflektivität aus den Koeffizienten:

$\rightarrow I \propto \langle c_m \cdot W \rangle \propto \left\langle \frac{c\cos\varphi}{n} \varepsilon |E|^2 \right\rangle \propto n\cos\varphi\,|E|^2$

Energiedichte

Ausbreitungs-
geschwindigkeit

↳ Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche

$$\Rightarrow R = \frac{I_R}{I_{in}} = \underbrace{\frac{n_1\cos\varphi}{n_1\cos\varphi}}_{1}\underbrace{\left|\frac{E_R}{E_{in}}\right|^2}_{|\rho|^2} = \underline{\underline{|\rho|^2}} \quad \text{und} \quad T = \frac{I_T}{I_{in}} = \underline{\underline{\frac{n_2\cos\psi}{n_1\cos\varphi}|\tau|^2}}$$

4. Spezialfall - senkrechter Einfall

↳ für senkrechten Einfall verschwindet die Polarisationsabhängigkeit

$$\cos\varphi = 1 \qquad \rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad \tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Bemerkung:

- für Glass $n = 1{,}5$ beträgt $R = \left(\frac{1{,}5-1}{1{,}5+1}\right) = 4\%$
- für $n_2 > n_1$ ist $\rho < 0$, dies führt zu einem Phasensprung $\rho = |\rho| e^{i\phi} \Rightarrow \phi = \pi$

Anwendungen:

- Brewster - Fenster in HeNe Lasern
  - ↳ Emission von p-polarisierten Lichts
- Design von hochreflektiven bzw antireflektiven Beschichtungen für Optiken
- Entwicklung von Strahlteilern
  - ↳ NBS (neutral beam splitter)
  - ↳ PBS (polarizing beam splitter)
- Short / long pass filter
- Absorber
- Bandpass - Filter